Symmetrie-Gruppe eines geschlossenen Weltalls

F. Vollendorf

(Z. Naturforsch. **30 a**, 1510–1515 [1975]; eingegangen am 19. August 1975)

Symmetry Group of a closed Universe

The fourteen degrees of freedom of a free falling and rotating body are described by means of a non-compact simple 14-parameter Lie group G^{14}. It is shown that this group can be interpreted as the symmetry group of a spherically closed space. Finally an outlook is made to the combination of an internal and an external symmetry group in a nontrivial way.

1. Einleitung

„Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern [1]."

Dieser Grundsatz der Newtonschen Mechanik ist Ausdruck einer Symmetrieeigenschaft mechanischer Bewegungszustände, welche ihre mathematische Darstellung durch die Theorie der Galilei-Transformationen bzw. der (homogenen) Lorentz-Transformationen erhält.

Ersetzt man in dem zitierten Trägheitsprinzip die Wörter „Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung" durch die Formulierung „Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Rotationsbewegung", so erhält man ein weiteres Prinzip, welches ebenfalls Ausdruck einer offensichtlich bestehenden Symmetrie mechanischer Bewegungszustände ist.

Es erhebt sich die Frage, wie sich dieses Symmetrie-Prinzip gruppentheoretisch formulieren läßt.

2. Vierzehn Freiheitsgrade der Lage und Bewegung

Es soll rein anschaulich abgezählt werden, wieviele Freiheitsgrade der Lage und Bewegung einem frei fallenden elastisch verformbaren Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt zuzuschreiben sind. Da die Lage eines Gegenstandes durch Verschiebungen und Drehungen verändert werden kann, ergeben sich zweimal je drei Freiheitsgrade der Lage. Hinzu kommen zweimal je drei weitere Freiheitsgrade der gleichförmigen Translations- und der Rotationsbewegung. Da ein rotierender elastischer Körper verformt wird, müssen in diesem Zusammenhang noch die Freiheitsgrade der Stauchung in drei paarweise zueinander senkrecht stehenden Richtungen mit in die Betrachtung gezogen werden. Unter der Voraussetzung, daß der betrachtete Körper bei einer Verformung sein Volumen nicht ändert, ergeben sich zwei Freiheitsgrade der Stauchung. Insgesamt wird man hierdurch auf $4 \cdot 3 + 2$ also 14 Freiheitsgrade geführt.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die aufgezählten 14 Freiheitsgrade der Lage und der Bewegung gruppentheoretisch zu beschreiben. Diese Problemstellung führt dazu, nach einer 14parametrigen Lie-Gruppe bzw. der entsprechenden Lie-Algebra zu suchen. Diese Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$ ist mathematisch gesehen eine Menge L^{14} von Operatoren, auf welcher eine Addition, eine Kommutatorbildung und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert sind. Jedes Element aus L^{14} muß sich dabei als reelle Linearkombination von 14 Basiselementen schreiben lassen. Im einzelnen sind für $n = 1, 2, 3$ je drei Operatoren der Verschiebung ($\hat{V}_n$), der Drehung ($\hat{U}_n$), der Translationsbeschleunigung (V_n), der Rotationsbeschleunigung (U_n) und zwei Operatoren der Stauchung (W_1 und W_2) einzuführen. Ein dritter Stauchungsoperator W_3 ist durch Gl. (1) festgelegt:

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0\,. \qquad (1)$$

Es verbleibt die Frage, wie die Kommutatoren für die eingeführten 14 speziellen Operatoren anzusetzen sind.

3. Geometrische Interpretation der Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$

Die Metrik des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums läßt höchstens eine 10parametrige Gruppe als Symmetrie-Gruppe zu. Es scheint daher so zu sein, daß sich eine 14parametrige Gruppe unter metrischen Gesichtspunkten nicht interpretieren ließe.

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Vollendorf, *D-3550 Marburg 7*, Clemens-Brentano-Str. 1.

Diese Situation ändert sich völlig, wenn das Raum-Zeit-Kontinuum durch die Mannigfaltigkeit $\hat{R}^8$ aller Paare (X, Y) von Raum-Zeit-Punkten X und Y ersetzt wird. In einer Arbeit II [2] wurde gezeigt, daß sich der Raum-Zeit eine das Gravitationsfeld beschreibende $(d\tau)$-Metrik dadurch aufprägen läßt, daß die Mannigfaltigkeit $\hat{R}^8$ in geeigneter Weise auf die Menge R^8 aller reellen Cayley-Zahlen abgebildet wird.

Die einem Paar (X, X) hierbei zugeordnete reelle Cayley-Zahl

$$u = \sum_{\lambda=0}^{3} u^\lambda \beta^\lambda + u_\lambda \beta_\lambda \tag{2}$$

soll im folgenden als die dem Punkt X zugeordnete Stelle bezeichnet werden.

Unter Benutzung der Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= \beta^0 + \beta_0\,, & t &:= \tfrac{1}{2}(u^0 + u_0)\,,\\ \omega_n &:= \beta^n + \beta_n\,, & p_n &:= \tfrac{1}{2}(u^n + u_n)\,,\\ \Omega_\nu &:= \beta^\nu - \beta_\nu\,, & q_\nu &:= \tfrac{1}{2}(u^\nu - u_\nu) \end{aligned}$$

läßt sich Gl. (2) in der Form (3) schreiben:

$$u = t + q + p\,, \tag{3}$$

$$q := \sum_{\nu=0}^{3} q_\nu \Omega_\nu\,, \quad p := \sum_{n=1}^{3} p_n \omega_n\,. \tag{4}$$

Es wird hierbei wie in den Arbeiten (I) [3], II und (III) [4] die Konvention benutzt, daß kleine lateinische Indizes stets von 1 bis 3 und griechische von 0 bis 3 laufen. Die Werte der Variablen t, q und p werden als Zeit, Ort und Auslenkung der Stelle u bezeichnet.

Unter einem Dreibein wird ein geordnetes Tripel $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ von rellen Cayley-Zahlen Γ_n verstanden, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$\Gamma_i \Gamma_i = 1\,, \tag{5 a}$$

$$\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i = 0\,, \tag{5 b}$$

$$(\Gamma_1 \Gamma_2)\Gamma_3 + \Gamma_1(\Gamma_2 \Gamma_3) = 0\,. \tag{5 c}$$

Hierbei soll die im folgenden beizubehaltende Vereinbarung getroffen werden, daß die Indizes i, j und k für die drei geraden Permutationen der Ziffern 1, 2 und 3 stehen sollen. Aus (5) folgen für die Cayley-Zahlen

$$\Gamma_0 := \Gamma_1(\Gamma_2 \Gamma_3) \quad \text{und} \quad \gamma_n := \Gamma_n \Gamma_0 \tag{6}$$

die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Gamma_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu &= 2\,\delta_{\nu\mu}\,,\\ \gamma_n \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \gamma_n &= 0\,,\\ \gamma_n \gamma_m + \gamma_m \gamma_n &= -2\,\delta_{nm}\,. \end{aligned}$$

Der Beweis hierzu ergibt sich unter Benutzung der in III über die Gl. (10) angegebenen Moufang-Identitäten durch einfaches Nachrechnen. Unter Benutzung der Tab. 7 aus I läßt sich zeigen, daß die Cayley-Zahlen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 ein Dreibein bilden.

Von besonderem physikalischen Interesse sind die Automorphismen des Rings $\mathbb{R}^8$ der reellen Cayley-Zahlen. Durch einen solchen Automorphismus Q wird das spezielle Dreibein $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ in ein Dreibein $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ übergeführt:

$$Q\colon \Omega_n \rightarrow \Gamma_n\,.$$

Umgekehrt legen diese drei Zuordnungen aufgrund der Gl. (6) den Automorphismus Q schon eindeutig fest. Man verschafft sich also leicht einen Überblick über die Menge aller Automorphismen des Rings $\mathbb{R}^8$, indem man die Menge aller Dreibeine untersucht. Setzt man zu diesem Zweck die Cayley-Zahlen Γ_n als Linearkombinationen der insgesamt sieben Elemente Ω_ν und ω_n an, so benötigt man hierzu 21 reelle Koeffizienten. Aufgrund der 7 Nebenbedingungen (5) sind von diesen Koeffizienten nur 14 voneinander linear unabhängig. Hieraus läßt sich schließen, daß die Menge $\mathbf{G}^{14}$ aller Automorphismen bezüglich des Abbildungsproduktes eine 14parametrige Lie-Gruppe $\mathbf{G}^{14}$ bildet.

Als Grundlage der folgenden Überlegungen dient der Gedanke, daß die dieser Gruppe zugehörige Lie-Algebra mit der im zweiten Abschnitt beschriebenen Algebra $\mathbb{L}^{14}$ identisch ist.

4. Einbettung der Algebra $\mathbb{L}^{14}$ in eine Lie-Algebra $\mathbb{L}^0$

Die Lie-Gruppe $\mathbf{G}^{14}$ ist Untergruppe der Gruppe $\mathbf{G}^0$, welche in III als Symmetrie-Gruppe eines Systems von 24 Differentialgleichungen eingeführt worden ist. Zur Untersuchung der Algebra $\mathbb{L}^{14}$ erweist es sich als zweckmäßig, zuerst die zu der Gruppe $\mathbf{G}^0$ gehörende Lie-Algebra $\mathbb{L}^0$ einzuführen. Zu diesem Zweck werden für einen reellen Parameter ε die auf Cayley-Zahlen wirkenden Operatoren $Z^\nu_{(\varepsilon)}$ und $Z_{n(\varepsilon)}$ definiert:

$$\begin{aligned} Z^\nu_{(\varepsilon)} &: u \rightarrow \exp(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\Omega_\nu)\;\; u \exp(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\Omega_\nu)\,,\\ Z_{n(\varepsilon)} &: u \rightarrow \exp(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\omega_n)\;\; u \exp(\tfrac{1}{2}\,\varepsilon\,\omega_n)\,. \end{aligned}$$

Hiermit sind die Operatoren

$$Z^\nu := [\,(\partial/\partial\varepsilon)\, Z^\nu_{(\varepsilon)}\,]_{\varepsilon=0}$$

und

$$Z_n := [\,(\partial/\partial\varepsilon)\, Z_{n(\varepsilon)}\,]_{\varepsilon=0}$$

infinitesimaler Transformationen festgelegt.

Durch Kommutatorbildung lassen sich weitere Operatoren bilden:

$$Z^{\nu\mu} := [Z^\nu, Z^\mu]\,,$$
$$Z_m{}^\nu := [Z^\nu, Z_m]\,,$$
$$Z_{nm} := [Z_n, Z_m]\,.$$

Die hiermit insgesamt 28 eingeführten Lie-Operatoren spannen die über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definierte 28dimensionale Lie-Algebra $\mathbb{L}^0$ auf. Durch Rechnung ergeben sich folgende Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} &[Z^\lambda, Z^{\mu\nu}] = \delta_{\lambda\mu} Z^\nu - \delta_{\lambda\nu} Z^\mu\,, \\ &[Z_l, Z_{mn}] = -\delta_{lm} Z_n + \delta_{ln} Z_m\,, \\ &[Z^\lambda, Z_n{}^\mu] = \delta_{\lambda\mu} Z_n\,, \quad [Z^\lambda, Z_{mn}] = 0\,, \\ &[Z_l, Z_n{}^\mu] = \delta_{ln} Z^\mu\,, \quad [Z_l, Z^{\mu\nu}] = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Aus der Gl. (7) können alle übrigen Vertauschungsrelationen unter Benutzung der folgenden beiden für Lie-Algebren gültigen Gleichungen [5]

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

und $$[X,Y] + [Y,X] = 0$$

hergeleitet werden. Mit den hiermit zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln bereitet die Untersuchung der Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$ keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr.

5. Operatoren der Drehungen und der Translationsbeschleunigungen

Räumliche Drehungen lassen sich unmittelbar anschaulich mit Hilfe einer Dreibein-Transformation beschreiben. So ist z. B. durch die Zuordnungen

$$\hat U_{3(\varphi)} : \Omega_1 \to \Omega_1 \cos\varphi - \Omega_2 \sin\varphi\,,$$
$$\hat U_{3(\varphi)} : \Omega_2 \to \Omega_2 \cos\varphi + \Omega_1 \sin\varphi\,,$$
$$\hat U_{3(\varphi)} : \Omega_3 \to \Omega_3$$

eine Drehung um die q_3-Achse festgelegt.

Die Forderung, daß $\hat U_3(\varphi)$ einen Automorphismus des Rings $\mathbb{R}^8$ bildet, liefert die folgenden weiteren Zuordnungen:

$$\hat U_{3(\varphi)} : \omega_1 \to \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi\,,$$
$$\hat U_{3(\varphi)} : \omega_2 \to \omega_2 \cos\varphi + \omega_1 \sin\varphi\,,$$
$$\hat U_{3(\varphi)} : \omega_3 \to \omega_3\,, \quad \hat U_{3(\varphi)} : \Omega_0 \to \Omega_0\,.$$

Die durch Gl. (4) definierte Auslenkung p verhält sich also bei Drehungen wie ein Vektor.

Mit den Definitionen des vierten Abschnitts kann der Lie-Operator

$$\hat U_3 := [(\partial/\partial\varphi)\,\hat U_{3(\varphi)}]_{\varphi=0}$$

folgendermaßen geschrieben werden:

$$\hat U_3 = Z_{12} - Z^{12}\,.$$

Für die Lie-Operatoren der Drehungen um die q_i-Achse erhält man entsprechend das Ergebnis

$$\hat U_i = Z_{jk} - Z^{jk}\,. \tag{8}$$

In einem nächsten Schritt soll die durch die Operatoren $\hat U_i$ aufgespannte Lie-Algebra $\mathbb{L}^3$ zu derjenigen der Lorentz-Gruppe erweitert werden. Eine Rechnung führt für die drei Operatoren

$$\tilde V_i := Z_k{}^j - Z_j{}^k$$

zu den folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[\hat U_l, \hat U_m] = \sum_{n=1}^{3} \hat U_n\, \varepsilon_{lmn}\,, \tag{9 a}$$

$$[\tilde V_l, \hat U_m] = \sum_{n=1}^{3} \tilde V_n\, \varepsilon_{lmn}\,, \tag{9 b}$$

$$[\tilde V_l, \tilde V_m] = -\sum_{n=1}^{3} \hat U_n\, \varepsilon_{lmn}\,. \tag{9 c}$$

Man erkennt, daß die Operatoren $\hat U_l$ und $\tilde V_l$ zusammen die Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe aufspannen.

Die durch den Operator $\tilde V_3$ erzeugte Transformation $\tilde V_{3(\lambda)}$ der 7 Cayley-Zahlen Ω_ν und ω_n soll explizit angegeben werden:

$$\tilde V_{3(\lambda)} : \Omega_1 \to \Omega_1 \operatorname{ch}\lambda + \omega_2 \operatorname{sh}\lambda\,, \tag{10 a}$$
$$\tilde V_{3(\lambda)} : \Omega_2 \to \Omega_2 \operatorname{ch}\lambda - \omega_1 \operatorname{sh}\lambda\,, \tag{10 b}$$
$$\tilde V_{3(\lambda)} : \Omega_3 \to \Omega_3\,, \tag{10 c}$$
$$\tilde V_{3(\lambda)} : \omega_1 \to \omega_1 \operatorname{ch}\lambda - \Omega_2 \operatorname{sh}\lambda\,, \tag{10 d}$$
$$\tilde V_{3(\lambda)} : \omega_2 \to \omega_2 \operatorname{ch}\lambda + \Omega_1 \operatorname{sh}\lambda\,, \tag{10 e}$$
$$\tilde V_{3(\lambda)} : \omega_3 \to \omega_3\,, \tag{10 f}$$
$$\tilde V_{3(\lambda)} : \Omega_0 \to \Omega_0\,. \tag{10 g}$$

Man bemerkt, daß sich die in (4) verwendeten Koordinaten q_n und p_n des Ortes und der Auslenkung, mit deren Hilfe sich nach den Ergebnissen aus II das Gravitationsfeld beschreiben läßt, wie die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke transformieren. Das ist physikalisch so zu verstehen, daß durch die Gln. (10 a) bis (10 e) nicht eine die Zeit t mit umfassende Transformation (mechanischer) Vorgänge, sondern eine Transformation momentaner (mechanischer) Bewegungszustände beschrieben wird. Häufig werden die Begriffe eines Bewegungsvorgangs und eines Bewegungszustands miteinander verwechselt, da man ja empirisch gesehen erst durch die im Laufe der Zeit erfolgende Ortsänderung eines Gegenstandes bemerkt, daß sich dieser im Zustand der Bewegung befindet.

Die Forderung, daß die Lie-Operatoren V_i der Translationsbeschleunigungen Automorphismen des Rings $\mathbb{L}^8$ erzeugen, macht nun eine Abänderung der bisher noch nicht betrachteten Gln. (10 f) und (10 g) erforderlich. Auf der Grundlage der durch (10 a) bis (10 c) festgelegten Dreibein-Transformation führt eine Rechnung zu der folgenden Abbildungsvorschrift:

$$\begin{aligned}
V_{3(\lambda)}&: \Omega_1 \to \Omega_1 \operatorname{ch}\lambda + \omega_2 \operatorname{sh}\lambda\,,\\
V_{3(\lambda)}&: \Omega_2 \to \Omega_2 \operatorname{ch}\lambda - \omega_1 \operatorname{sh}\lambda\,,\\
V_{3(\lambda)}&: \Omega_3 \to \Omega_3\,,\\
V_{3(\lambda)}&: \omega_1 \to \omega_1 \operatorname{ch}\lambda - \Omega_2 \operatorname{sh}\lambda\,,\\
V_{3(\lambda)}&: \omega_2 \to \omega_2 \operatorname{ch}\lambda + \Omega_1 \operatorname{sh}\lambda\,,\\
V_{3(\lambda)}&: \omega_3 \to \omega_3 \operatorname{ch}2\lambda + \Omega_0 \operatorname{sh}2\lambda\,,\\
V_{3(\lambda)}&: \Omega_0 \to \Omega_0 \operatorname{ch}2\lambda + \omega_3 \operatorname{sh}2\lambda\,.
\end{aligned}$$

Für den Lie-Operator

$$V_3 := [\,(\partial/\partial\lambda)\, V_{3(\lambda)}\,]_{\lambda=0}$$

ergibt sich damit

$$V_3 = Z_2{}^1 - Z_1{}^2 + 2\, Z_3{}^0\,.$$

Aufgrund seiner Einführung wird V_3 als Operator der Translationsbeschleunigung in Richtung der q_3-Achse physikalisch interpretiert.

Durch zyklisches Vertauschen der Ziffern 1, 2 und 3 wird man zu dem folgenden Ergebnis geführt:

$$V_i = Z_k{}^j - Z_j{}^k + 2\, Z_i{}^0\,. \tag{11}$$

Gegenüber Drehungen verhalten sich diese drei neuen Beschleunigungsoperatoren V_i wie die Komponenten eines Vektors:

$$[V_l, \hat{U}_m] = \sum_{n=1}^{3} V_n\, \varepsilon_{lmn}\,.$$

Wie sich aus der Gl. (9) ablesen läßt, ist die kleinste Teilalgebra von $\mathbb{L}^0$, deren Elementmenge die Operatoren $\tilde{V}_l$ enthält, zu derjenigen der Lorentz-Gruppe isomorph. Analog hierzu wird im nächsten Abschnitt die kleinste Teilalgebra $\mathbb{L}$ von $\mathbb{L}_0$ untersucht, deren Elementmenge die Operatoren V_l enthält.

6. Aufbau der Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$

Durch direktes Nachrechnen findet man, daß sich die Dimensionsanzahl dieser Algebra $\mathbb{L}$ zu 14 ergibt. Wegen der am Ende des dritten Abschnitts formulierten Grundannahme ist daher $\mathbb{L}$ als die im zweiten Abschnitt beschriebene Algebra $\mathbb{L}^{14}$ zu interpretieren. 15 Operatoren aus L^{14} sind durch die folgenden Definitionen gegeben:

$$\begin{aligned}
P_i &:= Z^{0i} - \tfrac12 Z_{jk} - \tfrac12 Z^{jk} + Z_i^0 + \tfrac12 Z_k{}^j - \tfrac12 Z_j{}^k\,,\\
\overline{P}_i &:= Z^{0i} - \tfrac12 Z_{jk} - \tfrac12 Z^{jk} - Z_i^0 - \tfrac12 Z_k{}^j + \tfrac12 Z_j{}^k\,,\\
Q_i &:= \tfrac12 Z_{jk} - \tfrac12 Z^{jk} + \tfrac12 Z_k{}^j + \tfrac12 Z_j{}^k\,, \qquad\qquad (12)\\
\overline{Q}_i &:= \tfrac12 Z_{jk} - \tfrac12 Z^{jk} - \tfrac12 Z_k{}^j - \tfrac12 Z_j{}^k\,,\\
W_i &:= 2\, Z_i{}^i - Z_j{}^j - Z_k{}^k\,.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung

$$W_1 + W_2 + W_3 = 0$$

erweisen sich 14 dieser Operatoren als voneinander linear unabhängig.

Mit Hilfe der Gl. (7) lassen sich die Kommutatoren der Operatoren (12) berechnen. Die für die weiteren Überlegungen wichtigsten sollen notiert werden:

$$\begin{aligned}
[P_i, W_i] &= 2\, P_i\,, & [\overline{P}_i, W_i] &= -2\, \overline{P}_i\,,\\
[P_i, W_j] &= -P_i\,, & [\overline{P}_i, W_j] &= \overline{P}_i\,,\\
[P_i, W_k] &= -P_i\,, & [\overline{P}_i, W_k] &= \overline{P}_i\,,\\
[Q_i, W_i] &= 0\,, & [\overline{Q}_i, W_i] &= 0\,,\\
[Q_i, W_j] &= 3\, Q_i\,, & [\overline{Q}_i, W_j] &= -3\, \overline{Q}_i\,,\\
[Q_i, W_k] &= -3\, Q_i\,, & [\overline{Q}_i, W_k] &= 3\, \overline{Q}_i\,,
\end{aligned}$$

$$[W_i, W_k] = 0\,.$$

Diese legen die Form des Wurzeldiagramms [5] zu $\mathbb{L}^{14}$ fest, durch welches man einen unmittelbaren Einblick in die Struktur der Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$ gewinnt.

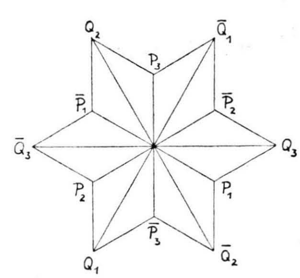

Abb. 1. Wurzeldiagramm zur Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$.

Man sieht an Abb. 1, daß die komplexe Erweiterung zu $\mathbb{L}^{14}$ der 14dimensionalen komplexen Ausnahme-Algebra, welche häufig als G_2 bezeichnet wird, isomorph ist. Weiterhin ist zu sehen, daß die Operatoren Q_n, $\overline{Q}_n$ und W_n eine achtdimensionale Teilalgebra $\mathbb{L}^8$ der Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$ bilden.

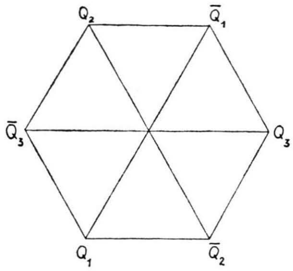

Abb. 2. Wurzeldiagramm zur Lie-Algebra $\mathbb{L}^8$.

Ein Vergleich der Gln. (8) und (11) mit der Gl. (12) zeigt, daß die Operatoren $\hat{U}_i$ und V_i der dreidimensionalen Drehungen bzw. Translationsbeschleunigungen durch die Gl. (13) gegeben sind:

$$\hat{U}_i = Q_i + \overline{Q}_i, \quad V_i = P_i - \overline{P}_i. \tag{13}$$

Die Operatoren W_i sind paarweise miteinander vertauschbar und genügen der Bedingung (1).

Sie werden daher als Stauchungsoperatoren interpretiert.

Aus physikalischen Gründen ist zu erwarten, daß die Operatoren $\hat{U}_i$ und W_i zusammen mit den Operatoren U_i der Rotationsbeschleunigung eine Lie-Algebra aufspannen. Es kann sich hierbei nur um die schon eingeführte Algebra $\mathbb{L}^8$ handeln. Damit kommt man zu dem folgenden Ansatz:

$$U_i = Q_i - \overline{Q}_i.$$

Es verbleibt nun nur noch die physikalische Interpretation der drei Operatoren $P_l + \overline{P}_l$. Statt dessen werden im nächsten Abschnitt die Operatoren

$$\hat{V}_i := \tfrac{1}{4}\,(P_i + \overline{P}_i + Q_i + \overline{Q}_i)$$

betrachtet. Aus der Gl. (12) folgt hierfür

$$\hat{V}_i = \tfrac{1}{2}(Z^{0i} - Z^{jk}). \tag{14}$$

7. Das Weltall als näherungsweise sphärischer Raum

Zunächst soll angegeben werden, welche Transformationsoperatoren $\hat{V}_{3(\varphi)}$ durch den Lie-Operator $\hat{V}_3$ erzeugt werden. Aus Gl. (14) läßt sich das folgende Ergebnis ablesen:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{3(\varphi)}&: \Omega_0 \to \Omega_0 \cos\varphi + \Omega_3 \sin\varphi, \\
\hat{V}_{3(\varphi)}&: \Omega_3 \to \Omega_3 \cos\varphi - \Omega_0 \sin\varphi, \\
\hat{V}_{3(\varphi)}&: \Omega_1 \to \Omega_1 \cos\varphi - \Omega_2 \sin\varphi, \\
\hat{V}_{3(\varphi)}&: \Omega_2 \to \Omega_2 \cos\varphi + \Omega_1 \sin\varphi, \\
\hat{V}_{3(\varphi)}&: \omega_n \to \omega_n.
\end{aligned} \tag{15}$$

Wendet man den Operator $\hat{V}_{3(\varphi)}$ auf die spezielle Stelle

$$u_{\mathrm{I}} = t + t\,\Omega_0$$

an, so wird diese in eine Stelle

$$\hat{V}_{3(\varphi)}\, u_{\mathrm{I}} = t + q_0\,\Omega_0 + q_3\,\Omega_3$$

transformiert, welche der Nebenbedingung

$$(t)^2 = (q_0)^2 + (q_3)^2$$

genügt. Wendet man allgemein Operatoren $\hat{V}_{i(\varphi)}$ an, welche durch die Operatoren $\hat{V}_i$ erzeugt werden, so wird die Stelle u_{I} in eine Stelle u der Form

$$u = t + \sum_{\nu=0}^{3} q_\nu\,\Omega_\nu$$

mit

$$(t)^2 = \sum_{\nu=0}^{3} (q_\nu)^2 \tag{16}$$

transformiert. Durch die Gl. (16) wird eine mit der Zeit t linear expandierende dreidimensionale Sphäre beschrieben. Damit wird auch die physikalische Bedeutung der Elemente $\hat{V}_i$ klar. Diese sind als die Lie-Operatoren der Verschiebungen auf einer dreidimensionalen Sphäre zu interpretieren. Wie aus Gl. (15) abzulesen ist, bleibt bei diesen Verschiebungen der durch die Gl. (4) definierte Auslenkungsvektor p invariant.

Die Gruppe der auf einer dreidimensionalen Sphäre durchführbaren Drehungen und Verschiebungen ist zur Gruppe $\mathbf{SO}^0(4)$ isomorph. Dementsprechend spannen die Operatoren $\hat{U}_n$ und $\hat{V}_n$ zusammen eine Lie-Algebra $\mathbb{L}^6$ auf, welche zu derjenigen der Gruppe $\mathbf{SO}^0(4)$ isomorph ist:

$$\begin{aligned}
[\hat{U}_l, \hat{U}_m] &= \sum_{n=1}^{3} \hat{U}_n\,\varepsilon_{lmn}, \\
[\hat{V}_l, \hat{U}_m] &= \sum_{n=1}^{3} \hat{V}_n\,\varepsilon_{lmn}, \\
[\hat{V}_l, \hat{V}_m] &= \sum_{n=1}^{3} \hat{V}_n\,\varepsilon_{lmn}.
\end{aligned}$$

Damit gelangt man zu dem folgenden Resultat: Die im fünften Abschnitt durchgeführte Ersetzung der Operatoren $\tilde{V}_i$ durch die Operatoren V_i bedingt, daß das Weltall als ein sphärisch geschlossener Raum angesehen werden muß.

Die Gruppe $\boldsymbol{G}^{14}$ läßt sich dann als Symmetrie-Gruppe mechanischer Bewegungszustände von Körpern in diesem Weltall interpretieren.

8. Abschließende Bemerkungen

Es ergibt sich eine Fülle von Themen, welche im Anschluß an das erzielte Ergebnis zu untersuchen sind. Auf mögliche Konsequenzen für die Gravitationstheorie und die Theorie der Elementarteilchen soll hingewiesen werden.

Zunächst erscheint es erfolgversprechend zu sein, die durchgeführten Symmetrieüberlegungen auf die Einsteinsche Gravitationstheorie zu übertragen. Damit läßt sich vermutlich die von Earman [6] wieder aufgeworfene Frage beantworten, wie dem Begriff einer aktiven (Koordinaten-)Transformation innerhalb der Einsteinschen Gravitationstheorie eine nicht triviale Bedeutung gegeben werden kann. Als interessant könnte sich erweisen, Operatoren der Rotationsbeschleunigung auf Sterne bzw. Sternsysteme anzuwenden, um herauszufinden, welche Verformungen diese Objekte bei einer Rotation erfahren.

Ein zweiter Hinweis bezieht sich auf die großen Schwierigkeiten, welche sich in der Elementarteilchentheorie beim Versuch der nicht trivialen Vereinigung von internen Symmetrie-Gruppen (z. B. $\boldsymbol{SU}(3)$) mit der Poincaré-Gruppe ergeben haben [7].

Die Poincaré-Gruppe dient hierbei zur Beschreibung der Symmetrieeigenschaften von Bewegungs*vorgängen*. Es liegt nun der Gedanke sehr nahe, daß die untersuchte Gruppe $\boldsymbol{G}^{14}$, welche Symmetrien der Bewegungs*zustände* beschreibt, in bezug auf Elementarteilchen die Rolle der internen Symmetrie-Gruppe spielt.

Für diese Hypothese spricht z. B. die Abb. 2, welche zeigt, daß die komplexen Erweiterungen zu den Lie-Algebren $\mathbb{L}^8$ und $\boldsymbol{su}(3)$ zueinander isomorph sind. Eine weitere Stützung erhält diese Hypothese dadurch, daß der entwickelte Formalismus eine nicht triviale Vereinigung der Lie-Algebra $\mathbb{L}^{14}$ mit der zur Poincaré-Gruppe gehörenden Lie-Algebra $\mathbb{L}^{10}$ ermöglicht. Zunächst wird bemerkt, daß die für die Arbeit III grundlegende zu $\boldsymbol{SO}^0(4,4)$ isomorphe Gruppe $\boldsymbol{G}^0$ mindestens eine zur Poincaré-Gruppe isomorphe Gruppe umfaßt. Deren Lie-Algebra $\mathbb{L}^{10}$ läßt sich leicht als Teilalgebra zu $\mathbb{L}^0$ darstellen. Sie wird durch die folgenden von den Elementen aus L^{14} linear unabhängigen Operatoren aufgespannt:

$$B_i := Z^i\,, \qquad A_i := Z^{jk}\,,$$
$$T_0 := Z^0 + Z_3\,, \quad T_i := Z^{i0} + Z_3{}^i\,.$$

Diese zehn Operatoren sind bis auf eine automorphe Transformation eindeutig bestimmt.

Es sollte demnach möglich sein, mit Hilfe der zu $\boldsymbol{SO}^0(4,4)$ isomorphen Gruppe $\boldsymbol{G}^0$ sowohl die externen als auch die internen Eigenschaften der Elementarteilchen zu beschreiben.

[1] I. Newton, Mathematische Prinzipien der Naturlehre, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1963, S. 32.

[2] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. **30 a**, 642 [1975]; zitiert als Arbeit II.

[3] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. **30 a**, 431 [1975]; zitiert als Arbeit I.

[4] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. **30 a**, 891 [1975]; zitiert als Arbeit III.

[5] A. Salam, The Formalism of Lie Groups in Theoretical Physics, International Atomic Energy Agency, Vienna 1963, S. 173.

[6] J. Earman, Covariance, Invariance, and the Equivalence of Frames, Fondations of Physics, Vol. **4**, 267 [1974].

[7] W. D. McGlinn, Problem of Combining Interaction Symmetries and Relativistic Invariance, Phys. Rev. Letters **12**, 467 [1964].